UN PEU DE SKOLEM-NOETHER, UN PEU DE NOYAU

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : partie **1** et partie **2** questions **1)** à **3)**.

— Piste rouge : tout le devoir.

Dans ce devoir, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ et les éléments de $\mathbb{K}^n$ sont vus comme des colonnes, ce qui revient à identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note E_i la colonne de taille n dont le $i^{\text{ème}}$ coefficient vaut 1 et dont les autres sont nuls, et E_{ij} la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient de position (i, j) vaut 1 et dont les autres sont nuls.

Attention, les résultats de la partie **1** seront fort utiles dans la partie **2**.

1 CARACTÉRISATION DE L'INVERSIBILITÉ PAR LE NOYAU

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *noyau de A* et on note $\operatorname{Ker} A$ l'ensemble $\left\{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = 0\right\}$ des solutions du système linéaire homogène $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$.

1) Montrer que $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

2) Soient $U \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $V \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $W \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice par blocs $\begin{pmatrix} U & W \\ 0 & V \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice pour laquelle $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

a) Montrer que A ne possède pas de colonne nulle.

b) En déduire l'existence de matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ pour lesquelles $PA = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix}$.

c) Soit $Y \in \operatorname{Ker} B$. Trouver un scalaire $x \in \mathbb{K}$ pour lequel $\begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$.

4) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, alors A est inversible.

En résumé, une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. On savait déjà que A est inversible si et seulement si le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une et une seule solution pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$. La caractérisation de l'inversibilité par le noyau montre que le second membre nul suffit. C'est très fort !

5) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Montrer que si $AB = I_n$, A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre. Ça aussi, c'est fort !

b) En déduire que si AB est inversible, A et B le sont aussi. On connaissait la réciproque.

2 LE THÉORÈME DE SKOLEM-NOETHER

Pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, l'application $M \longmapsto PMP^{-1}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même a des propriétés très spécifiques. En l'occurrence, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$PI_nP^{-1} = I_n, \qquad P(\lambda M + \mu N)P^{-1} = \lambda PMP^{-1} + \mu PNP^{-1} \qquad \text{et} \qquad P(MN)P^{-1} = \big(PMP^{-1}\big)\big(PNP^{-1}\big).$$

Réciproquement, on souhaite montrer que toute application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même qui satisfait ces trois identités est de la forme $M \longmapsto PMP^{-1}$ pour une certaine matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Ce résultat est appelé le *théorème de Skolem-Noether*, quand bien même il n'est qu'un cas très particulier du véritable théorème de Skolem-Noether. Le théorème a d'abord été prouvé par le mathématicien norvégien Thoralf Skolem (1887-1963) en 1927, mais son travail n'a pas quitté la Norvège et la grande algébriste allemande Emmy Noether (1882-1935), également réputée pour ses travaux de physique théorique, l'a retrouvé indépendamment en 1933.

Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une application pour laquelle pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$\varphi(I_n) = I_n, \qquad \varphi(\lambda M + \mu N) = \lambda\varphi(M) + \mu\varphi(N) \qquad \text{et} \qquad \varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N).$$

1) On pose $\mathscr{K} = \Big\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \quad \varphi(M) = 0\Big\}$. Pour montrer que $\mathscr{K} = \{0\}$, on suppose par l'absurde $\mathscr{K} \neq \{0\}$.

a) Calculer $\varphi(0)$ et montrer que pour tous $A \in \mathscr{K}$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$: $\quad AM \in \mathscr{K} \quad$ et $\quad MA \in \mathscr{K}$.

b) Montrer que $\mathscr{K}$ contient une matrice dont le coefficient de position $(1,1)$ est non nul.

c) Montrer que $E_{11} \in \mathscr{K}$, puis que $E_{ij} \in \mathscr{K}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.

d) Dénicher une contradiction.

2) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que si M est inversible, $\varphi(M)$ l'est aussi.

Réciproquement, on suppose $\varphi(M)$ inversible.

b) Soit $X \in \operatorname{Ker} M$. En s'intéressant à la matrice $\begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, montrer que $X = 0$ et conclure.

On pose à présent $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$ et $D = \operatorname{diag}\big(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\big)$.

3) Dans cette question, on fait l'hypothèse supplémentaire que $\varphi(D) = D$.

a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\varphi\big(E_{kk}\big) = E_{kk}$ en s'intéressant au produit $(D - I_n) \dots \big(\widehat{D - \omega^{k-1} I_n}\big) \dots \big(D - \omega^{n-1} I_n\big)$, dans lequel le chapeau signifie qu'on saute le terme $D - \omega^{k-1} I_n$.

b) Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. Calculer $E_{ij} E_{kk}$ et $E_{kk} E_{ij}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, puis en déduire l'existence d'un nombre complexe $a_{ij} \in \mathbb{C}^*$ pour lequel $\varphi\big(E_{ij}\big) = a_{ij} E_{ij}$.

c) Montrer que $a_{ij} a_{jk} = a_{ik}$ pour tous $i, j, k \in [\![1, n]\!]$ et en déduire l'existence de nombres complexes $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}^*$ pour lesquels pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$: $\quad a_{ij} = \dfrac{r_i}{r_j}$.

d) Montrer que $R = \operatorname{diag}(r_1, \dots, r_n)$ est inversible et que $\varphi(M) = RMR^{-1}$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

4) On revient au cas général.

a) Montrer que $\operatorname{Ker}\big(\varphi(D) - \omega^{j-1} I_n\big) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, puis justifier l'existence d'une colonne non nulle $C_j \in \mathbb{C}^n$ pour laquelle $\varphi(D) C_j = \omega^{j-1} C_j$ et $\overline{C_j}^{\top} C_j = 1$, où $\overline{C_j}$ est la colonne C_j dont on a conjugué les coefficients.

On note Q la matrice de colonnes $C_1, \dots, C_n$ dans cet ordre, puis $\widetilde{Q}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont la $i^{\text{ème}}$ ligne vaut $\overline{C_i}^{\top} \varphi\big(E_{ii}\big)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

b) Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{pk}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$? Montrer que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$E_{ii} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-k(i-1)} D^k, \qquad \text{puis que } \varphi\big(E_{ii}\big) C_j = \delta_{ij} C_j.$$

c) En déduire que $\widetilde{Q} Q = I_n$ — ce qui suffit à prouver l'inversibilité de Q — puis que $\varphi(D) = QDQ^{-1}$.

5) Montrer pour finir que φ est de la forme $M \longmapsto PMP^{-1}$ pour une certaine $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.